

教育部教學實踐研究計畫成果報告
Project Report for MOE Teaching Practice Research Program

計畫編號/Project Number：PEE1110186

學門專案分類/Division：工程學門

計畫年度：111 年度一年期 110 年度多年期

執行期間/Funding Period：2022.08.01 – 2023.07.31

工程數學與水文學的 3D 視覺化建模教學

工程數學(二)、水文學

計畫主持人(Principal Investigator)：胡明哲

協同主持人(Co-Principal Investigator)：許少瑜

執行機構及系所(Institution/Department/Program)：國立臺灣大學/生物環境系統工程系

成果報告公開日期：立即公開 延後公開（統一於 2025 年 7 月 31 日公開）

繳交報告日期(Report Submission Date)：2023 年 9 月 20 日

工程數學與水文學的 3D 視覺化建模教學

一. 本文 Content

1. 研究動機與目的 Research Motive and Purpose

30 年前的科幻電影「回到未來」，當初想像的科技很多都已經實現了，現在的科幻電影是否預言了未來 30 年後的科技呢？騰空手指筆畫即可虛擬畫出 3D 物件，進行工程設計、旋轉、縮放、修改，這些技術是否是未來教學、討論、學習的工具呢？

現在有平板、智慧型手機等，學生、教師不再侷限於傳統教室黑板上課，可以使用筆電、平板等進行動態及視覺化的上課教學方式，上課可說是方便又生動，現在科技能做到的事可以使用程式語言、3D 建模教學，可以根據自己的想法畫出各種 3D 圖。

故本計畫的動機是想像未來 30 年後可能的視覺化教學方式，提早讓未來師生的教育與學習的影像、及 3D 建模上課變成常態，故本計畫的目的是將工程數學與水文學複雜的內容與公式，進行 3D 圖視覺化呈現與分析，提升學習成效，並進一步藉由跨領域的課程整合與實作加深學生的印象。

未來教學的想像是希望未來可以讓學生有一個激發創造力的展現，以修課學生的成長與學習為目的，並鼓勵進行跨領域的交流、不拘泥於犯錯，勇敢地面對生活中的大小問題。然而，每個人專長皆不一，也並非每個課程都適合所有的學生。因此，讓學生透過課程的了解與分析，規劃出屬於學生自己的課程地圖，從課堂上的理論到生活中的實作，用不同的角度去思考與體驗，替創新路上打造專屬於學生專業的核心能力。重點是在實際的專案與實作中，透過主動積極的思考模式，與夥伴們一起不斷嘗試、解決現實中的問題，畢竟天生我材必有用，每個人都可以創造出更好的、甚至是無限的可能。所以，全方面地推動發揮想像力與創新能力的新型教育，培養並鼓勵學生以創新的概念去思考，並以創意的方式去解決問題，以及建立跨領域的創新整合設計與實作，是本計畫的主要目標。

本計畫之教學實踐課程包含工程數學與水文學，工程數學由計畫主持人胡明哲教授擔任授課教師，計畫主持人在工程數學課程結合 3D 繪圖視覺化呈現。水文學由協同主持人許少瑜副教授擔任授課教師，計畫主持人胡明哲教授執行水文學之 3D 建模及視覺化之應用，以及跨領域學習工程數學之數學工具，結合應用於水文學之物理現象分析。

工程數學是一門工程專業課程，可以做為一個工具，應用在水文學、地下水課程這些專業課程，例如河川流量變化、地下水污染傳輸、地下水流動等。然而，現今大多數教學的方式偏重教師單方面的教學，並以考試、作業檢視學生的學習成效，在這種環境下，學生可能只願意去尋求標準答案，而不是去了解工程數學如何跨領域應用於水文學、地下水課程，以及這些專業科目的關聯。這結果使得學生將工程數學視為獨立的課程，認為工程數學的用處不大而沒什麼學習興趣。大多數學生上課時將會興致缺缺，甚至睡覺、滑手機或是做其他事情，浪費每週的三小時，甚至在修完課程後就忘記曾經學過什麼。這樣不但使上課沒有任何意義，也只是單純地浪費時間。

於是，如何激發學生對工程數學的興趣，以及如何幫助學生在課堂中有效率地學習是一門重要的課題。為了改善問題，進行領域整合學習，讓學生清楚地了解水文學、地下水課程如何結合工程數學的應用，並提升學生的學習興趣，讓學生可以在修完課程後

印象深刻，即是此研究計畫的目的。

現代程式語言功能多樣，要以程式語言畫出 3D 圖不是件難事，於是研究計畫打算藉由程式語言，把工程數學的跨領域應用以 3D 繪圖視覺化呈現，而不是枯燥乏味的公式與過程說明，讓學生從 3D 圖中了解工程數學的功能與有趣之處，也能同時理解工程數學如何應用於水文學、地下水課程，達成事半功倍的效果。此外，為了讓學生們更能深入學習並理解工程數學的原理，會建議學生自主獨立學習，於上課前預習，也希望學生能透過寫程式畫 3D 圖，去理解工程數學的公式與 3D 圖的構成原理，以及思考如何應用工程數學於其他領域，將有助於學生加深印象，培養出明確的認知概念與獨立的思考能力，而不是透過以往傳統的作業與考試來求得標準答案，導致學後就忘的情形。

2. 研究問題 Research Question

(a) 問題：2050 年大學的未來教學會是如何？

本計畫希望開放的去想像未來農業工程、環境的必修課「工程數學」、「水文學」的教學的可能變化。利用現在科幻的 3D 物件模型建構，進行農業工程、水文學、環境規劃設計，想像未來教學、討論、學習的工具。

(b) 問題：在教學上，數學分析工具能否與環境領域的應用整合？能否利用視覺化 3D 繪圖協助教學？

本計畫目標將整合工程數學、水文學之地下水應用的跨學科學習。如使用工程數學的折積(convolution)概念，搭配集水區的降雨紀錄與單位歷線，在水文學中學習推估出集水區的河川流量，水文學中的地下水分析可使用拉普拉斯方程(laplace equation)推估地下水流動，也利用熱傳導方程式(heat equation)進行地下水污染傳輸之模擬。藉由以上的例子來說明工程數學的用處，同時也能學習其他的專業科目，達成領域整合學習的目的。

透過程式語言把工程數學的應用轉成視覺化 3D 圖，也就是將工程數學的教學內容與河川流量、地下水污染傳輸、地下水流動等相關應用做結合，以 3D 動畫圖呈現。

(c) 問題：如何激發學生對工程數學的興趣，以及如何幫助學生在課堂中有效率地學習是一門重要的課題？

本計畫目標為訓練學生自主獨立學習，於上課前要求學生進行預習，再與老師事前討論，了解一下要學習的內容，課後則以自由開放的態度讓學生學習摸索程式語言，嘗試使用程式語言畫 3D 圖，藉由預習與實作加深印象，而不是單純地套用公式去解課本的習題或應付考試。

本教學方式希望翻轉老師學生教與學的互動關係，請學生上台解釋課程教材，使得學生更深入了解課程內容，並利用年輕世代學生對科技(電腦、平板、程式、美學)的工具，進一步更新一般的教學方式與工具。

3. 文獻探討 Literature Review

本研究整合視覺化 3D 學習、翻轉教學關係、獨立學習的觀念，以下回顧相關教育研究的文獻。翻轉教室是近年來常被提及的教學理念[1-3]，藉由翻轉老師與學生教學關係，提高學生上台改為課程的解釋者。讓學習者思考如何學習內容，授課者更有效益的運用課堂互動時間，增加老師與學生的互動，並培養學生獨立思考、自主解決問題的習慣，有助於加深學生在課堂中學習的印象。故本研究結合翻轉教學，嘗試翻轉老師與學生的教學角色，在課堂上則增加老師與學生的互動，給予學生思考方向並協助學生解決問題。

透過視覺化工具及載具展示，可以使教學不再枯燥乏味[4,5]，有助於誘發學生的好奇心、強化學生的專注力、提升學生學習動機[6,7]。故本研究嘗試利用 3D 視覺化工具，改變學生對工程數學及水文學等學科的學習方式，透過程式語言把工程數學的應用轉成視覺化 3D 圖，也就是將工程數學的教學內容與河川流量、地下水污染傳輸、地下水流動等相關應用做結合，以 3D 動畫圖呈現，並非單純地解釋公式的應用，改變過去以往的傳統教學，能滿足領域整合學習，不再侷限於單一課程的內容。

本研究於上課前要求學生進行預習，稍微了解一下要學習的內容，課後則以自由開放的態度讓學生學習摸索程式語言，嘗試使用程式語言畫 3D 圖，藉由預習與實作加深印象，而不是單純地套用公式去解課本的習題或應付考試，這樣一來，學生可明確地感受到成就感，增加學習的熱忱，不再因為作業與考試而對工程數學感到厭煩。所以，透過創新的教學，能減少學生學後就忘的可能，培養學生自主性的學習能力與獨立的思考能力、並建立明確清楚的邏輯觀念[8,9]。

4. 教學設計與規劃 Teaching Planning

(a) 工程數學

將工程數學的公式透過寫程式以 3D 圖呈現出來，並應用於水文學、地下水課程，做出河川流量變化、地下水污染傳輸、地下水流動等 3D 圖，藉此激發學生們的興趣，也讓學生了解工程數學的活用，並把不同專業科目串聯一起思考，使得學習工程數學是一種樂趣而並非單純應付考試、作業。

(b) 水文學

在台灣特殊的地形與水文特性，使得水資源極易受到氣候變遷影響，極端乾旱事件往往對於農業、民生與工業用水產生極大衝擊。在大學各項專業科目中，水文學是水資源管理最重要的基礎科目。因此本系所開設的水文學具有廣泛的應用價值與跨領域的訓練。學生在本門課所學習到的專業知識，將有助於其未來在跨領域的學習與發展。然而，在整個水文學教學課程中，地下與土壤水的運動是同學們最不容易直接觀測與想像的水文循環過程。加上抽象的物理機制與相對繁雜的數理模式，往往造成這方面的學習效率低落。因此，希望透過本教學改善計畫，透過土壤水運動的顯像化(visualization)技術、數值模擬與實地探索，進一步分析這些工具對於學生理解與吸收效率的影響。土壤水的運動是農業水資源管理的核心物理機制，也涉及土木水利工程的低衝擊開發設計，以及海綿城市等新興綠色基礎建設。而利用深層地層結構所進行深層地質碳封存，

也顯示地下水文學在氣候行動碳中和與淨零碳排上的重要性。因此，此計畫的成果將能幫助台灣未來在這些領域的人才培育。

(c) 跨領域整合

本教學計畫更進一步，將工程數學、水文學、地下水進行跨領域整合，例如為了預測農業灌溉、地下水水流之動態影像變化，則運用工程數學的 Laplace 方程式，而地下水濃度、熱能傳遞動態變化可以使用工程數學的 Heat 方程式進行預測；也就是針對想要預測的內容，考慮使用工程數學裡的哪些工具，這可以展現工程數學的活用多元化，同時也能學習相關的水文學、地下水課程知識，接著把預測結果轉換成 3D 圖呈現出來，不但能完美清楚地呈現預測的情形，還能表現出工程數學的有趣之處。

配合課程：工程數學、水文學

教學對象：一般大學—專業系所大學學生

研究方法：理論科目與應用科目的整合教學、跨領域教學、視覺化教學

5. 研究設計與執行方法 Research Methodology

(a) 環境領域的數學工具整合：

將工程數學、水文學、地下水課程整合，進行領域整合學習。在水文學方面，利用單位歷線與降雨資料去推估河川流量的變化，其中單位歷線可以由瞬時單位歷線求得，而瞬時單位歷線的推求方法之一便是使用工程數學的折積(convolution)概念，搭配集水區的降雨紀錄與單位歷線，可推估出集水區的河川流量。在水文學的地下水分析方面，可以使用熱傳導方程式(heat equation)進行地下水污染傳輸之模擬，以及使用拉普拉斯方程(laplace equation)推估地下水流動情形。藉由以上的例子來說明工程數學的用處，同時也能學習其他的專業科目，達成領域整合學習的目的。

(b) 視覺化 3D 繪圖：

透過程式語言把工程數學的應用轉成視覺化 3D 圖，也就是將工程數學的教學內容與河川流量、地下水污染傳輸、地下水流動等相關應用做結合，以 3D 動畫圖呈現，並非單純地解釋公式的應用，改變過去以往的傳統教學，能滿足領域整合學習，不再侷限於單一課程的內容。而透過生動的 3D 動畫展示，使教學不再枯燥乏味，有助於誘發學生的好奇心、強化學生的專注力、提升學生學習動機，並改變學生對工程數學的看法、態度與情感。

(c) 自主獨立學習(independent study)：

於上課前要求學生進行預習，稍微了解一下要學習的內容，課後則以自由開放的態度讓學生學習摸索程式語言，嘗試使用程式語言畫 3D 圖，藉由預習與實作加深印象，而不是單純地套用公式去解課本的習題或應付考試，這樣一來，學生可明確地感受到成就感，增加學習的熱忱，不再因為作業與考試而對工程數學感到厭煩。所以，透過創新的教學，能減少學生學後就忘的可能，培養學生自主性的學習能力與獨立的思考能力，並建立明確清楚的邏輯觀念。

(d) 翻轉老師學生教與學的互動關係：

本教學方式希望翻轉老師學生教與學的互動關係，請學生上台解釋課程教材，使得學生更深入了解課程內容，並利用年輕世代學生對科技(電腦、平板、程式、美學)的工具，進一步更新一般的教學方式與工具。老師則在課堂上則增加與學生的互動，給予學生思考方向並協助學生解決問題。所以，翻轉教學的重點不是單純地請學生上台解釋課程，而是在於思考如何更有效益的運用課堂互動時間，增加老師與學生的互動，並培養學生獨立思考、自主解決問題的習慣，有助於加深學生在課堂中學習的印象。

6. 教學暨研究成果 Teaching and Research Outcomes

(1) 教學過程與成果

(a) 傅立葉級數、轉換介紹與 3D 圖形
工程數學教科書中的傅立葉級數公式：

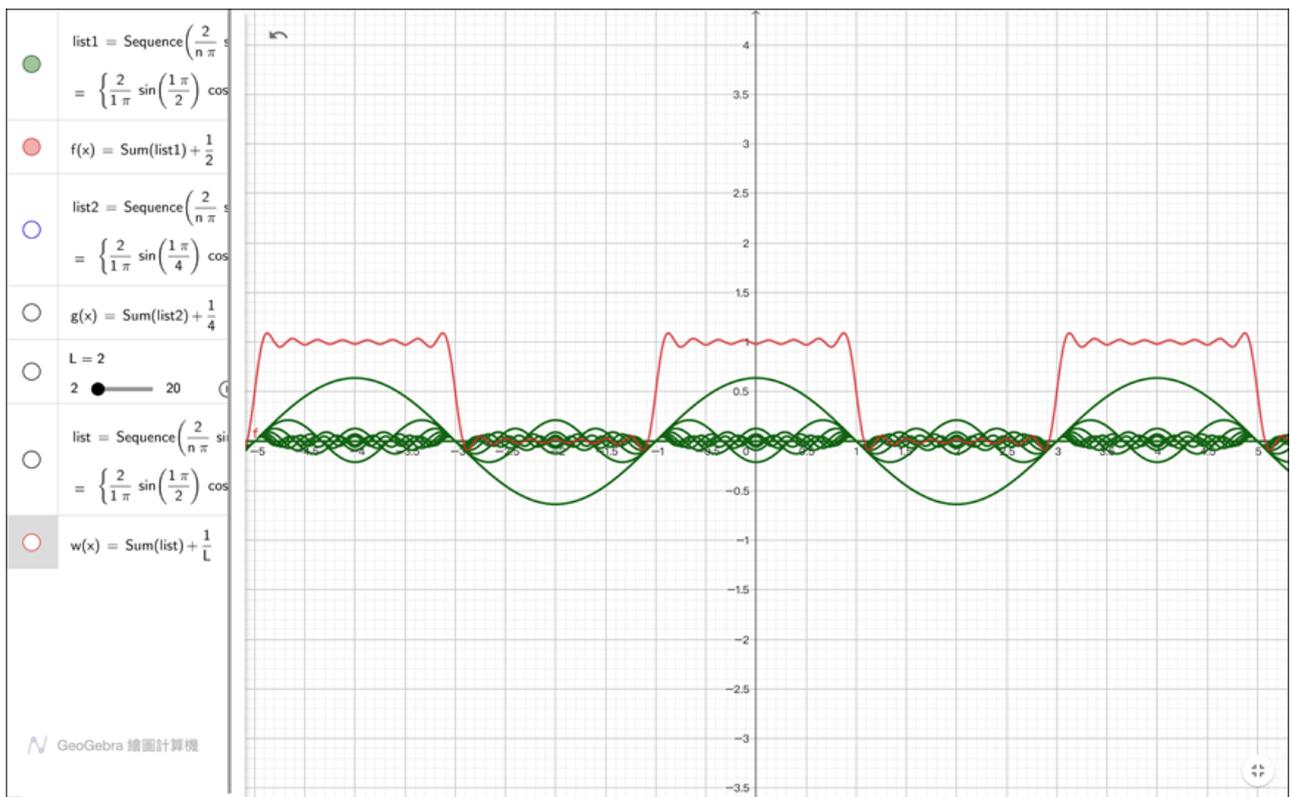
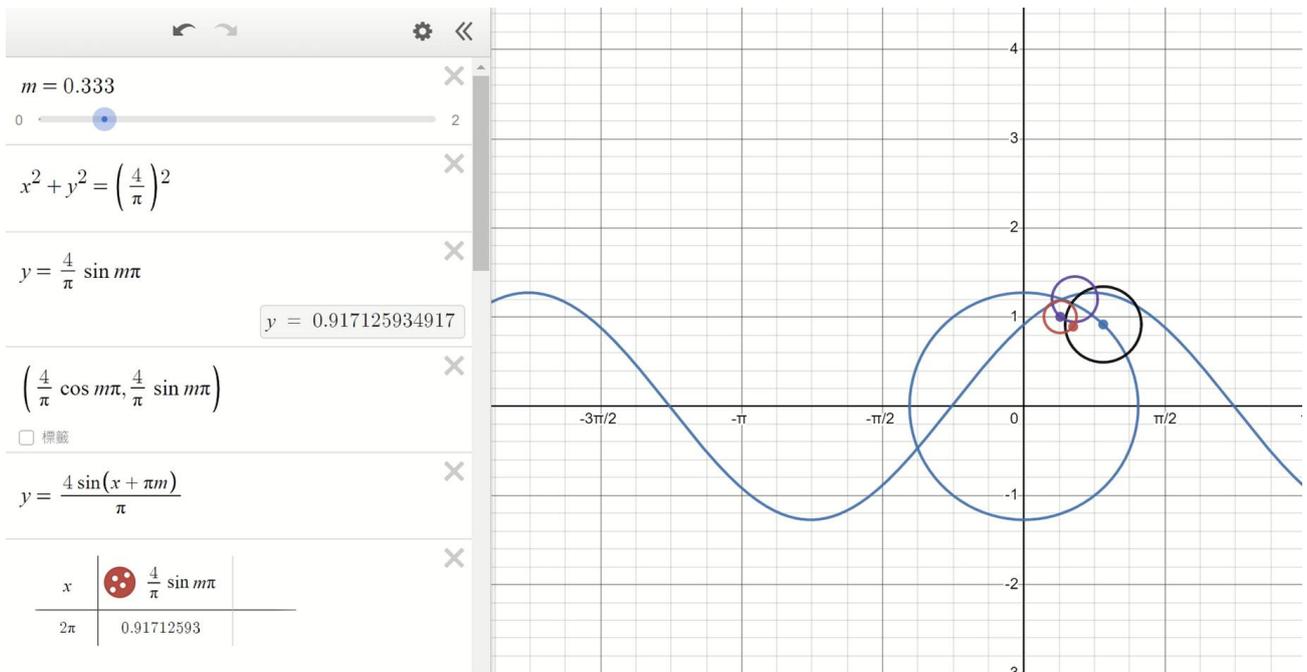
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

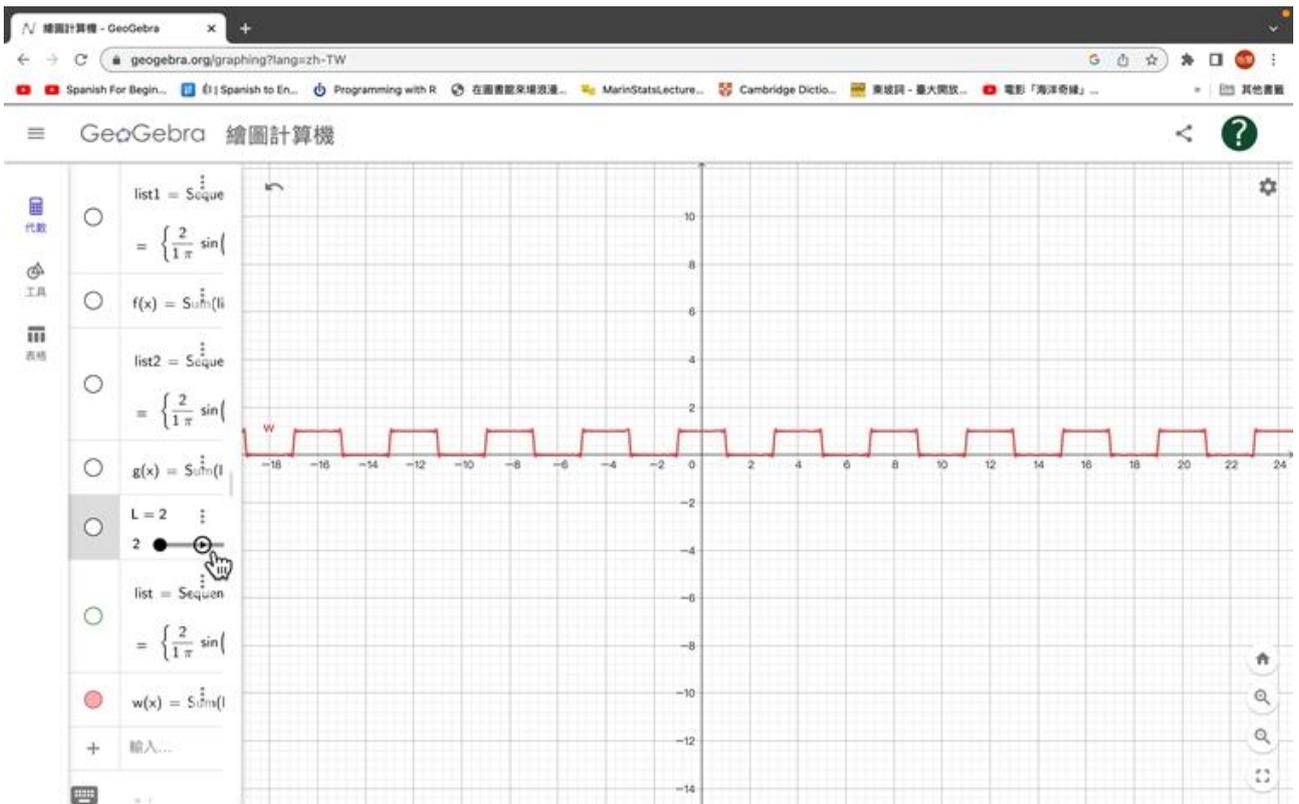
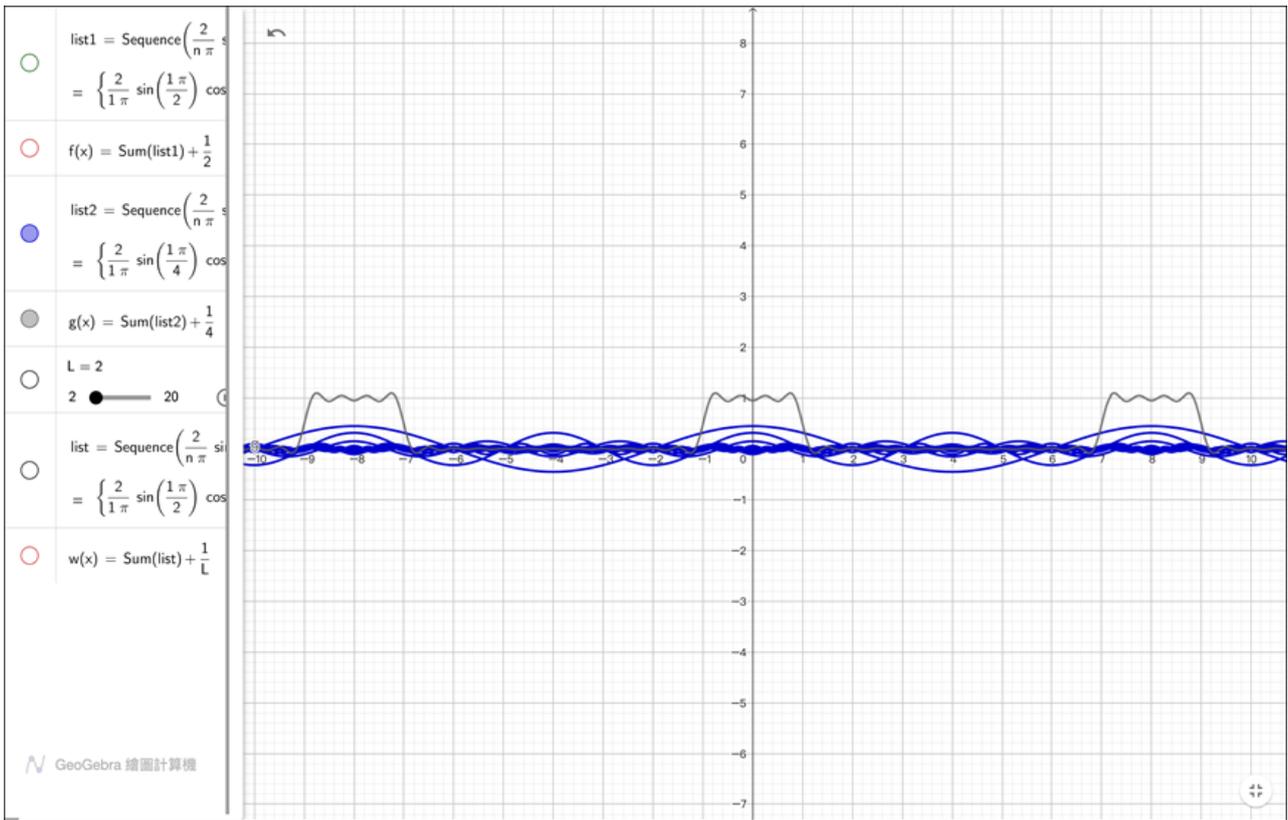
其中傅立葉係數以 Euler 公式描述分別如下：

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx & n = 1, 2, \dots \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx & n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

本計畫在課程教學時，每週針對一組（約 5 位同學），進行自主獨立學習（同學預習下週教材）、翻轉老師學生教與學的互動（同學簡報學習內容、老師針對同學解釋不清楚處提出問題並進行討論）、進行視覺化 3D 繪圖（瞭解工程數學之內容、進程式撰寫）。

同學自主獨立完成的程式撰寫，將傅立葉級數視覺化成果如下，該組同學因自主學習，更深入瞭解其數學意義，也提供視覺化的效果，協助其他同學學習。





t = 0.88 << 0.1 x >>
 0 ————— 12.57

A = (0, 0, t)
 = (0, 0, 0.85)

$v1p = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \cos(t) \\ \frac{4}{\pi} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$
 = (0.84, 0.96, 0)

C = Intersect(y軸, x軸)
 = (0, 0, 0)

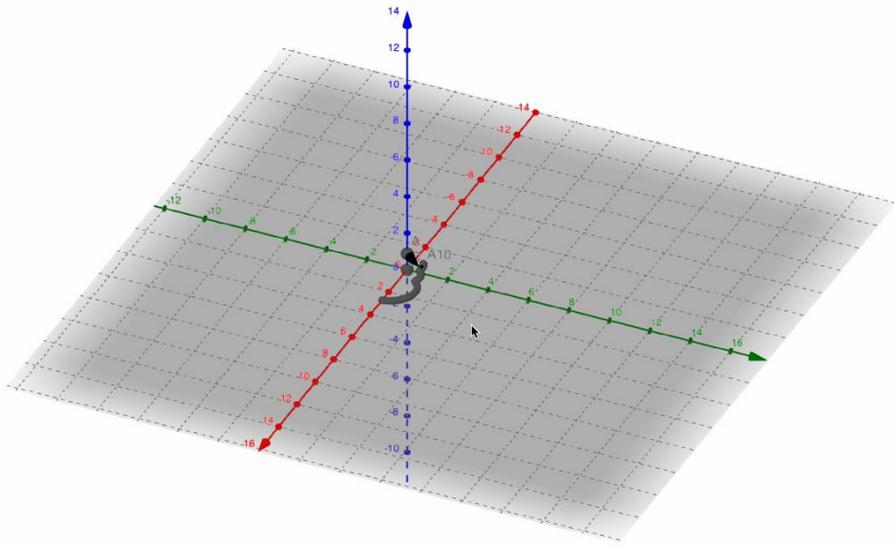
v1 = Vector(C, v1p)
 = $\begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.96 \\ 0 \end{pmatrix}$

A1 = Translate(A, v1)
 = (0.84, 0.96, 0.85)

v1' = Vector(A, A1)
 = $\begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.96 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\pi} \cos(3t) \\ \frac{4}{3\pi} \sin(3t) \\ 0 \end{pmatrix}$

00:11.88



t = 6.28 << 0.1 x >>
 0 ————— 12.57

A = (0, 0, t)
 = (0, 0, 6.25)

$v1p = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \cos(t) \\ \frac{4}{\pi} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$
 = (1.27, -0.04, 0)

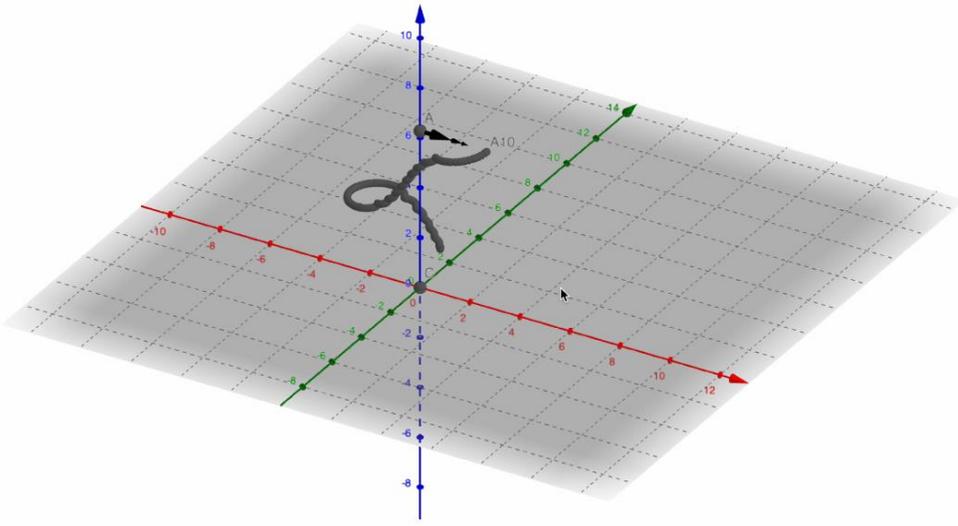
C = Intersect(y軸, x軸)
 = (0, 0, 0)

v1 = Vector(C, v1p)
 = $\begin{pmatrix} 1.27 \\ -0.04 \\ 0 \end{pmatrix}$

A1 = Translate(A, v1)
 = (1.27, -0.04, 6.25)

v1' = Vector(A, A1)
 = $\begin{pmatrix} 1.27 \\ -0.04 \\ 0 \end{pmatrix}$

$v2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\pi} \cos(3t) \\ \frac{4}{3\pi} \sin(3t) \\ 0 \end{pmatrix}$



t = 9.99 << 0.1 x >>
 0 ————— 12.57 (C)

A = (0, 0, t)
 = (0, 0, 9.98)

$v1p = \begin{pmatrix} \frac{4}{\pi} \cos(t) \\ \frac{4}{\pi} \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$
 = (-1.08, -0.67, 0)

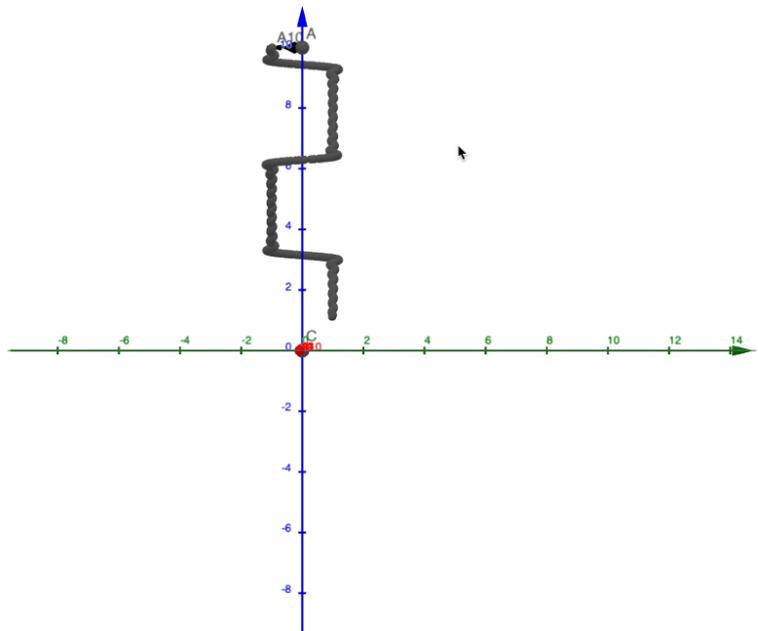
C = Intersect(y軸, x軸)
 = (0, 0, 0)

v1 = Vector(C, v1p)
 = $\begin{pmatrix} -1.08 \\ -0.67 \\ 0 \end{pmatrix}$

A1 = Translate(A, v1)
 = (-1.08, -0.67, 9.98)

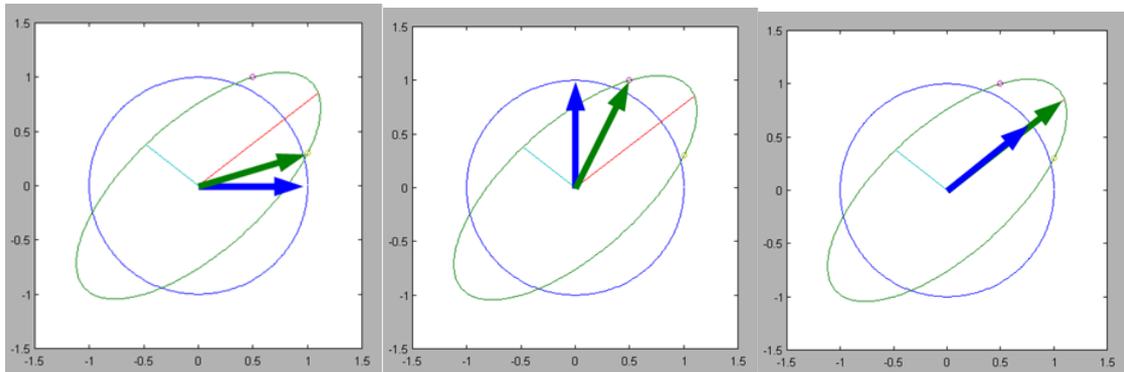
v1' = Vector(A, A1)
 = $\begin{pmatrix} -1.08 \\ -0.67 \\ 0 \end{pmatrix}$

v2 = $\begin{pmatrix} \frac{4}{3\pi} \cos(3t) \\ \frac{4}{3\pi} \sin(3t) \\ 0 \end{pmatrix}$



(b) Eigenvalue 及 Eigenvector 的座標旋轉之視覺化呈現

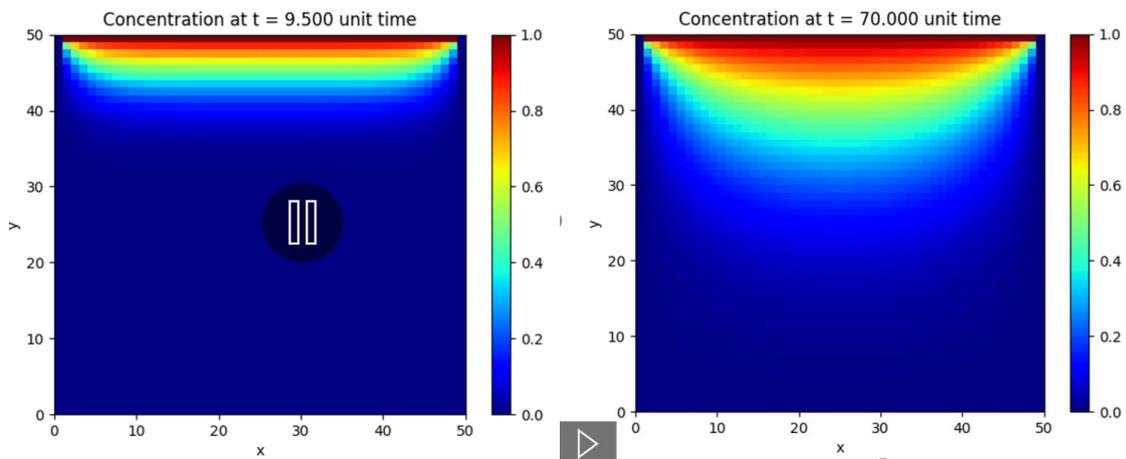
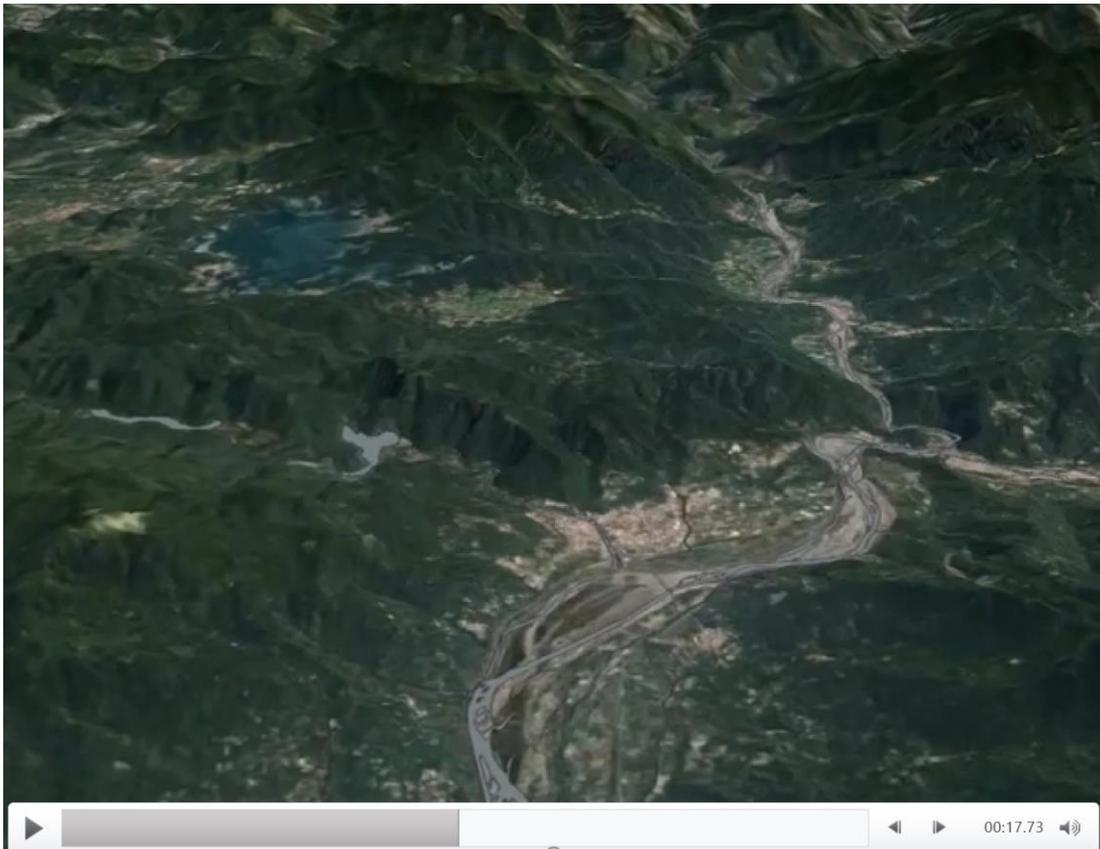
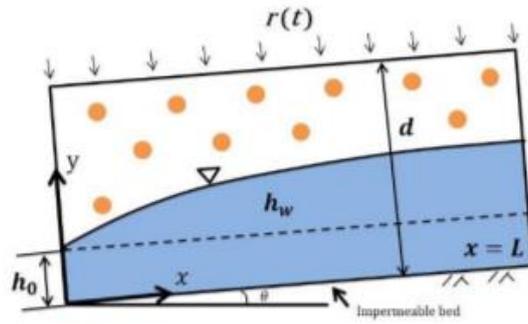
Eigenvector 的概念是種線性轉換，可能會存在一向量，該向量經過該線性轉換得到的結果只有縮放，沒有旋轉。則該向量即為 eigenvector，而縮放的值就是 eigenvalue。



(c) 偏微分 Laplace 方程式在農業灌溉、地下水水流之模擬，可用 Laplace 方程式表達：

$$\nabla^2 h^2 = \frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h^2}{\partial z^2} = \frac{2S}{K_x} \frac{\partial h}{\partial t}$$

本計畫針對此課程內容，執行自主獨立學習，翻轉教與學，進行老師學生互動討論，再進行視覺化 3D 繪圖，此部分同學的成果如下，他們結合二維圖形（非拘限含水層的滲流水面線變化）與三維地形，進行 Laplace 方程式的農業灌溉、地下水水流之模擬。



(2) 教師教學反思

在整學期的課程中，希望同學對此領域有整體的內容與瞭解，期初用課程大綱對學

生進行整體的架構解說，且每週課程對該週單元領域教學外，也解釋每一單元與此課程整體架構之關係，讓同學的知識連貫而不片段，能作整體性的思考。

學期的課程教學中，希望提升同學興趣，不定時的丟出問題，給同學思考的時間，與其他同學討論的機會，回答的機會，並且儘量在理論中，穿插實際例子與圖形影片。

啟發學生的創造力與針對問題有獨立思考的能力：給予同學課後閱讀的相關論文 paper，過程中協助同學解決問題，最後讓同學上台簡報，訓練同學報告的清楚與完整、回答問題的的思考邏輯，也希望創造課堂中同學與老師、或同學與同學間的討論風氣。

在課後，針對不同學生有不同的適性教育：將上課同學分組，利用下課後的時間，與同學討論課程相關之內容或 paper，希望提高同學對此領域的興趣，並教導同學學術研究的思考方式，解決問題的能力。

在每節課的最後，與學生討論這週的課程內容最有問題的是哪一部份，可以讓學生思考本週學到哪些東西，哪部分懂了，哪部分還有問題，課後還可以繼續回答問題，或下週將不清楚的部分再做加強解釋。

(3) 學生學習回饋

學生評語[教學意見調查統計表上之資料]

- 老師非常有耐心，課後也會留下來幫我們解惑，上課方式讓我們的吸收效果很好。
- 很用心教學的老師，盡量讓學生理解課本裡想表達的意思，用最簡單以及學生最能理解的方式，雖然有時候感覺的出來老師可能有短暫的被困惑了，但是在一個下課後，還是會再講一遍希望我們真的有學到東西，謝謝老師的用心教學，受益良多!
- 老師整理的筆記超好用的，讓我讀起來事半功倍，輕鬆許多呢!
- 授課內容很棒 課本很棒 推倒清楚 文字內容清楚 章節重點 具體舉例也都很清楚 希望可以改進的部分 就是如果有足夠的時間 在講解例題的時候 可以選一兩題後面比較特別或是困難的題目 因為我們寫習題的時候都覺得 後面有不少老師選的題目 前面課程內容 並沒有辦法幫忙解決 因為課本本身的推導就很清楚 圖也很清楚 老師可以多著墨在課本上 沒有的應用 謝謝老師老師辛苦了!!!每次看老師這麼賣力的在台上講解我就覺得好感動
- 老師總是很認真教學，也願意幫同學解惑，更會設身處地為學生著想，讓我很感動! 謝謝老師這學期的教導。
謝謝老師這學期的教導，而且老師人很好!!!! 都會細心為學生解惑~老師加油

7. 建議與省思 Recommendations and Reflections

本計畫將 3D 視覺化建模工具應用到課程教學，應用課程包含工程數學與水文學。本計畫在工程數學與水文學的教學中，利用 3D 建模視覺化，模擬工程數學中的傅立葉級數圖形，傅立葉轉換、特徵值特徵向量、偏微分方程式模擬，及水文學中的地下水模擬、地下水污染傳輸、地下水流動。本計畫已完成的目標包含環境領域的數學工具整

合、視覺化 3D 模擬、自主獨立學習、及翻轉老師學生教與學的互動關係。

參考文獻 References

- [1] Herreid, C. F. & Schiller, N. A. (2013). Case studies and the flipped classroom. *Journal of College Science Teaching*, 42(5), 62-66.
- [2] Bishop, Jacob, and Matthew A. Verleger. "The flipped classroom: A survey of the research." 2013 ASEE Annual Conference & Exposition. 2013.
- [3] Akçayır, Gökçe, and Murat Akçayır. "The flipped classroom: A review of its advantages and challenges." *Computers & Education* 126 (2018): 334-345.
- [4] Vavra, Karen L., et al. "Visualization in science education." *Alberta Science Education Journal* 41.1 (2011): 22-30.
- [5] Bishop, Alan J. "Review of research on visualization in mathematics education." *Focus on learning problems in mathematics* 11.1 (1989): 7-16.
- [6] Gilbert, John K. "Visualization: A metacognitive skill in science and science education." *Visualization in science education*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2005. 9-27.
- [7] Gilbert, John K., Miriam Reiner, and Mary Nakhleh, eds. *Visualization: Theory and practice in science education*. Vol. 3. Springer Science & Business Media, 2007.
- [8] Moore, Michael. "On a theory of independent study." *Distance Education*. Routledge, 2020. 68-94.
- [9] Powers, Elaine A. "The use of independent study as a viable differentiation technique for gifted learners in the regular classroom." *Gifted Child Today* 31.3 (2008): 57-65.